MA2115 Clase 10: La Ecuación de Bernoulli. Método de separación de variables

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

1 La ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli es una EDO de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n, \quad n \neq 0,\ n \neq 1. \tag{1}$$

La substitución $w = y^{1-n}$ conduce a una ecuación diferencial lineal

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}y^n\frac{dw}{dx} \tag{2}$$

Substituyendo (2) en (1),

$$\frac{y^n}{1-n}\frac{dw}{dx} + P(x)y = f(x)y^n.$$

Dividiendo por y^n obtenemos

$$\frac{1}{1-n}\frac{dw}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x).$$

Multiplicando por $(1-n)$ y sustituyendo $y^{1-n} = w$ obtenemos

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)wP(x) = (1-n)f(x).$$

Es decir, mediante la substitución $w = y^{1-n}$, hemos reducido la ecuación de Bernoulli (1), a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, a saber,

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x). \tag{3}$$

Ejemplo 1 *Resolver* $2xyy' = 4x^2 + 3y^2$.

Solución: Dividiendo por $2xy$ la ecuación $2xyy' = 4x^2 + 3y^2$, obtenemos

$$y' = 2\frac{x}{y} + \frac{3}{2}\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} - \frac{3}{2x}y = \frac{2x}{y},$$

la cual es una ecuación de Bernoulli. Sea $w = y^2$, de donde $y = w^{1/2}$. Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2}w^{-1/2}\frac{dw}{dx}.$$

Substituyendo $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}w^{-1/2}\frac{dw}{dx}$ en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{1}{2}w^{-1/2}\frac{dw}{dx} - \frac{3}{2x}w^{1/2} = 2xw^{-1/2}.$$

Multiplicando por $2w^{1/2}$, obtenemos la ecuación lineal

$$\frac{dw}{dx} - \frac{3}{x}w = 4x.$$

Ahora aplicamos el método del factor integrante: multiplicando por $\mu(x) = e^{\int -\frac{3}{x}dx} = x^{-3}$, obtenemos

$$x^{-3}w' - 3x^{-4}w = 4x^{-2},$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^{-3}w\right) = \frac{4}{x^2} \quad &\Rightarrow \quad x^{-3}w = -\frac{4}{x} + C \\ &\Rightarrow \quad x^{-3}y^2 = -\frac{4}{x} + C \Rightarrow y^2 = -4x^2 + Cx^3. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 *Hallar la solución de* $6x^2dy - y\left(2y^3 + x\right)dx = 0$*,* $y(1) = \frac{1}{2}$.

Solución: Para $x \neq 0$, $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{6x^2}\left(2y^3 + x\right) = 0$, de donde

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2y^4}{6x^2} - \frac{xy}{6x^2} = 0,$$

y así, obtenemos la ecuación de Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{6x}y = \frac{1}{3x^2}y^4.$$

Haciendo el cambio $w = y^{-3}$, la ecuación viene a ser $\frac{dw}{dx} + \frac{w}{2x} = -\frac{1}{x^2}$. Mulitiplicando por el factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{2x}dx} = \sqrt{x} = x^{1/2}$, obtenemos

$$x^{1/2}\frac{dw}{dx} + \frac{1}{2}x^{-1/2}w = -x^{-3/2} \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(x^{1/2}w\right) = -x^{-3/2},$$

de donde

$$x^{1/2}w = \int -x^{-3/2}dx = 2x^{-1/2} + C.$$

Así, $w = \dfrac{2}{x} + \dfrac{C}{\sqrt{x}} = \dfrac{2 + C\sqrt{x}}{x}$, y por lo tanto la solución general es $y^3 = \dfrac{x}{2 + C\sqrt{x}}$. Usando la condición inicial $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2+C}$, de donde $C = 6$ y, finalmente, $y^3 = \dfrac{x}{2 + 6\sqrt{x}}$.

Ejemplo 3 *Halle la solución general de* $y\left(6y^2 - x - 1\right)dx + 2xdy = 0.$

Solución: $y\left(6y^2 - x - 1\right)dx + 2xdy = 0$ agrupando términos

$2xdy - y(x+1)dx + 6y^3dx = 0$ vemos que lo que tenemos es una ecuación de Bernoulli.

Dividiendo por y^3, obtenemos

$$2xy^{-3}dy - y^{-2}(x+1)dx = -6dx.$$

Sea $w = y^{-2}$. Entonces, $dw = -2y^{-3}dy \Rightarrow dy = -\dfrac{y^3dw}{2}$. Substituyendo en la ecuación, obtenemos

$$-\frac{2xy^{-3}y^3dw}{2} - y^{-2}(x+1)dx = -6dx.$$

Es decir, $xdw + w(x+1)dw = 6dx$. Dividiendo por x esta ecuación se convierte en la ecuación lineal $dw + w(1 + x^{-1})dx = 6x^{-1}dx$. Mulitiplicando por el factor integrante $\mu(x) = e^{\int(1+x^{-1})dx} = xe^x$, obtenemos

$$xe^xdw + we^x(x+1)dx = 6e^xdx \Rightarrow xwe^x = 6e^x + C.$$

Como $w = y^{-2}$, $y^2(6 + Ce^{-x}) = x$.

Ejemplo 4 *Halle la solución general* $x^2\dfrac{dy}{dx} + y^2 = xy.$

Solución:

$\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{1}{x}y = -\dfrac{1}{x^2}y^2$. Sea $w = y^{1-2} = y^{-1}$. Entonces

$$\frac{dw}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y^2\frac{dw}{dx}$$

de donde nos queda la ecuación

$$\begin{aligned}
-y^2\frac{dw}{dx} - \frac{1}{x}y &= -\frac{1}{x^2}y^2 \\
\frac{dw}{dx} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} &= \frac{1}{x^2} \\
\frac{dw}{dx} + \frac{1}{x}w &= \frac{1}{x^2} \text{ lineal}
\end{aligned}$$

factor integrante, $\mu(x) = e^{\int \frac{dx}{x}} = x$ por lo cual,

$$\begin{aligned} xdw + wdx &= \frac{1}{x}dx \\ d(xw) &= \frac{1}{x}dx \Rightarrow xw = \ln x + C \\ \frac{1}{y} &= \frac{\ln x + C}{x}. \end{aligned}$$

$$y = \frac{x}{\ln x + C}.$$

Ejemplo 5 *Resolver* $x\frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}$.

Solución: $\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x}y = 3y^{4/3}$. Bernoulli con $n = \frac{4}{3}$. Sea $w = y^{1-\frac{4}{3}} = y^{-1/3}$ luego $y = w^{-3}$ derivando obtenemos, $\frac{dy}{dx} = -3w^{-4}\frac{dw}{dx}$ substituyendo en $\frac{dy}{dx} + \frac{6}{x}y = 3y^{4/3}$ obtenemos, $-3w^{-4}\frac{dw}{dx} + \frac{6}{x}w^{-3} = 3w^{-4} \Rightarrow$ $-3\frac{dw}{dx} + \frac{6}{x}w = 3 \Rightarrow \frac{dw}{dx} - \frac{2}{x}w = -1$. Ecuación lineal de 1er orden cuya solución es $w = x + Cx^2 \Rightarrow y^{-1/3} =$ $x + Cx^2$

$$y = \frac{1}{(x + Cx^2)^3}.$$

Ejemplo 6 *Resolver* $\sqrt{y}y' + y^{3/2} = 1$; $y(0) = 4$.

Solución: $\sqrt{y}y' + y^{3/2} = 1 \Rightarrow y' + y = y^{-1/2}$ Bernoulli.

Sea $w = y^{1-(-1/2)} = y^{3/2}$; $\frac{dw}{dx} = \frac{3}{2}y^{1/2}\frac{dy}{dx}$ entonces $\sqrt{y}y' = \frac{2}{3}\frac{dw}{dx}$. Así, substituyendo en la ecuación original obtenemos la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{2}{3}\frac{dw}{dx} + w = 1 \Rightarrow \frac{dw}{dx} + \frac{3}{2}w = \frac{3}{2}.$$

Factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{3}{2}dx} = e^{\frac{3}{2}x}$

$$e^{\frac{3}{2}x}\frac{dw}{dx} + \frac{3}{2}we^{\frac{3}{2}x} = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}$$

$$\left(e^{\frac{3}{2}x}w\right)' = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x} \Rightarrow e^{\frac{3}{2}x}w = \int \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}dx$$

$$e^{\frac{3}{2}x}w = e^{\frac{3}{2}x} + C, C \in \mathbb{R}$$

$$w = 1 + Ce^{-\frac{3}{2}x}.$$

Como $w = y^{3/2}$ se tiene

$$y = \left(1 + Ce^{-\frac{3}{2}x}\right)^{2/3}.$$

Usando la condición inicial $y(0) = 4$, $4 = \left(1 + Ce^{-\frac{3}{2}(0)}\right)^{2/3} \Rightarrow 4 = (1 + C)^{2/3} \Rightarrow C = 7$.

Solución:

$$y = \left(1 + 7e^{-\frac{3}{2}x}\right)^{2/3}$$

Ejemplo 7 *Sea $\mathscr{F}$ la familia de curvas C, en el plano XY, tales que la ordenada de la intersección de la recta tangente a C en un punto cualquiera P de C con el eje Y es proporcional al cuadrado de la ordenada de P.*

a) *Demuestre que la familia $\mathscr{F}$ se puede modelar a través de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx}x - y = -Ky^2, \quad K \in \mathbb{R}.$$

b) *Halle la solución general de la ecuación diferencial de la parte* **a)**.

Solución: **a)** Sea $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera en C. La ecuación de la recta tangente a C en el punto $P(x_0, y_0)$ es

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x - x_0),$$

esta recta corta al eje Y en el punto $(0, b)$ donde $b = y_0 - \frac{dy}{dx}x_0$ es proporcional a y_0^2 de modo que $b = Ky_0^2$, para algún $K \in \mathbb{R}$. Entonces tenemos que

$$\frac{dy}{dx}x_0 = y_0 - b = y_0 - Ky_0^2 \Rightarrow y'x_0 - y_0 = -Ky_0^2,$$

y como $y_0 = y(x_0)$,

$$\frac{dy}{dx}x_0 = y(x_0) - Ky(x_0)^2 \text{para todo } x_0.$$

b) La ecuación diferencial es

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}x - y &= -Ky^2 \\
\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} &= -\frac{K}{x}y^2
\end{aligned}$$

Ecuación de Bernoulli ($n = 2$). Sea $z = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}$ de donde

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\frac{1}{y} &= \frac{K}{x} \\
\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x} &= \frac{K}{x}
\end{aligned}$$

factor integrante $\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}} = x$.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(xz) &= K \\
xz &= Kx + A \\
\frac{x}{y} &= Kx + A \\
y &= \frac{x}{Kx + A}
\end{aligned}$$

Ejemplo 8 *Sean a y b constantes positivas y sea u una solución de* $y' = ay - by^2$, *con* $y(0) = y_0$. *Demuestre que si* $y_0 < 0$ *entonces u no está acotada.*

Solución: $y' = ay - by^2 \Rightarrow y' - ay = -by^2$ Bernoulli $n = 2$.

Sea $w = y^{-1}$; $w' = -y^{-2}y'$. Luego

$-y^{-2}y' + ay^{-1} = b \Rightarrow w' + aw = b$ Lineal

Sea $\mu(x) = e^{\int a dx} = e^{ax}$. Así, $(e^{ax}w)' = be^{ax}$

$e^{ax}w = \int be^{ax}dx = \frac{b}{a}e^{ax} + C$ entonces

$w = \dfrac{b}{a} + \dfrac{C}{e^{ax}}$ luego $y = \dfrac{ae^{ax}}{be^{ax} + aC}$;

$y_0 = y(0) = \dfrac{a}{b + aC} \Rightarrow C = \frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}$.

Luego $y = \dfrac{e^{ax}}{\frac{b}{a}e^{ax} + \frac{1}{y_0} - \frac{b}{a}} = 0$.

Si $y_0 < 0$ entonces $\dfrac{1}{y_0} - \dfrac{b}{a} < 0$ y como $e^{ax}\dfrac{b}{a} > 0$.

Puede suceder que el denominador se anule, por lo tanto, y no estaría acotado. Más preciso, si $x_0 = \dfrac{1}{a}\ln\left(1 - \dfrac{a}{by_0}\right)$ entonces

$$\lim_{x \to x_0} y = \infty$$

2 Método de Variables Separables

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}, \tag{4}$$

es separable. De (4) se tiene

$$h(y)dy = g(x)dx. \tag{5}$$

Si $y = f(x)$ es solución de (5), entonces

$$\begin{aligned} h(f(x))\frac{dy}{dx} &= g(x) \\ \Leftrightarrow h(f(x))f'(x) &= g(x) \\ \Leftrightarrow \int h(f(x))f'(x)dx &= \int g(x)dx + C, \end{aligned}$$

pero $dy = f'(x)dx$. Así,

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + C.$$

Ejemplo 9 *Resuelva la ecuación diferencial* $2\,\mathrm{sen}\,y\cos x dx + \cos y\,\mathrm{sen}\,x dy = 0$.

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{sen}\,y\cos x dx &+ \cos y\,\mathrm{sen}\,x dy = 0\\
\Leftrightarrow 2\,\mathrm{sen}\,y\cos x dx &= -\cos y\,\mathrm{sen}\,x dy\\
\Leftrightarrow 2\frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}dx &= -\frac{\cos y}{\mathrm{sen}\,y}dy\\
\Leftrightarrow 2\int\frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}dx &= -\int\frac{\cos y}{\mathrm{sen}\,y}dy\\
\Leftrightarrow 2\ln|\,\mathrm{sen}\,x| &= -\ln|\,\mathrm{sen}\,y|+\ln C\\
\Leftrightarrow \ln|\,\mathrm{sen}\,x|^2 &+ \ln|\,\mathrm{sen}\,y| = \ln C\\
\Leftrightarrow \mathrm{sen}^2 x\cdot\mathrm{sen}\,y &= C,
\end{aligned}$$

de donde $\mathrm{sen}\,y = \dfrac{C}{\mathrm{sen}^2 x}$, con lo cual

$$y = \mathrm{arcsen}\left(\frac{C}{\mathrm{sen}^2 x}\right),\quad x\neq \pi k,\ k=1,2,3\ldots.$$

Ejemplo 10 *Resuelva la ecuación diferencial* $x^3dx+(y+1)^2dy=0$*.*

Solución: Tenemos que

$$\begin{aligned}
x^3dx+(y+1)^2dy &= 0\\
\Leftrightarrow x^3dx &= -(y+1)^2dy\\
\Leftrightarrow \int x^3dx &= -\int(y+1)^2dy+C\\
\Leftrightarrow \frac{x^4}{4} &= -\frac{(y+1)^3}{3}+C.
\end{aligned}$$

Ejemplo 11 *Resuelva el problema de valores iniciales* $\dfrac{dy}{dx}=xy+x-2y-2$*, con* $y(0)=2$*.*

Solución: A la ecuación $\dfrac{dy}{dx}=xy+x-2y-2$ la podemos escribir como $\dfrac{dy}{dx}=(y-2)(y+1)$. Separando variables tenemos que $\dfrac{dy}{y+1}=(x-2)dx$, de donde

$$\int\frac{dy}{y+1}=\int(x-2)dx \Rightarrow \ln|y+1| = \frac{1}{2}x^2-2x+C.$$

o equivalentemente $y+1=\exp\left(\dfrac{1}{2}x^2-2x+C\right)$. Substituyendo el valor inicial $y(0)=2$ en la última ecuación, obtenemos $3=e^C$, de donde $C=\ln 3$ y, finalmente,

$$y=\exp\left(\frac{1}{2}x^2-2x+\ln 3\right).$$

Ejemplo 12 *Resuelva el problema de valores iniciales* $x^2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+1}{3y^2+1}$*, con* $y(1) = 2$*.*

Solución: Multiplicando por $3y^2+1$ a la ecuación $x^2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+1}{3y^2+1}$, obtenemos $x^2(3y^2+1)\dfrac{dy}{dx} = x^2+1$, y ahora dividiendo entre x^2, tenemos que $(3y^2+1)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2+1}{x^2}$. Esta última ecuación es equivalente a $(3y^2+1)dy = \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$, e integrando, obtenemos

$$y^3 + y = x - \frac{1}{x} + C.$$

Usando la condición $y(1) = 2$, tenemos que $C = 10$ y, finalmente,

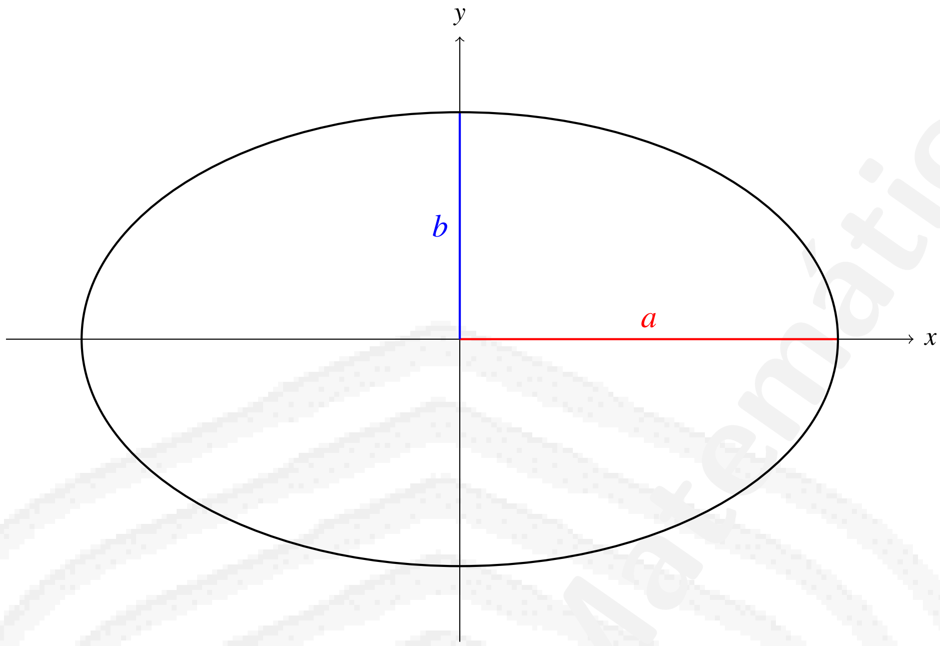
$$y^3 + y = x - \frac{1}{x} + 10.$$

Ejemplo 13 *Resuelva el problema de valores iniciales* $2x(y+1)dx - ydy = 0$*, con* $y(0) = -2$*.*

Solución: Podemos expresar la ecuación $2x(y+1)dx - ydy = 0$ como $2xdx = \left(1 - \dfrac{1}{y+1}\right)dy$, siempre que $y \neq -1$. Integrando obtenemos $x^2 = y - \ln|y+1| + C$, con $y \neq -1$. Usando la condición inicial tenemos que $0 = -2 - \ln|-1| + C$, de donde $C = 2$ y, finalmente, la solución del problema es $x^2 = y - \ln|y+1| + 2$.

Ejemplo 14 *Determinar las trayectorias ortogonales a la familia de elipses centradas en el origen* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$*, cuyo diámetro mayor es tres veces el diámetro menor.*

Solución: Tenemos dos casos: $a > b$ ó $a < b$. Resolvemos sólo el primero ya que el segundo es completamente análogo. Recordemos que los diametros de las elipses estan dados por $2a$ y $2b$, respectivamente.



Gráfica de la elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Si $a>b$ entonces la condición del enunciado nos dice que $a=3b$. Substituyendo esta última relación en la ecuación de la elipse, obtenemos

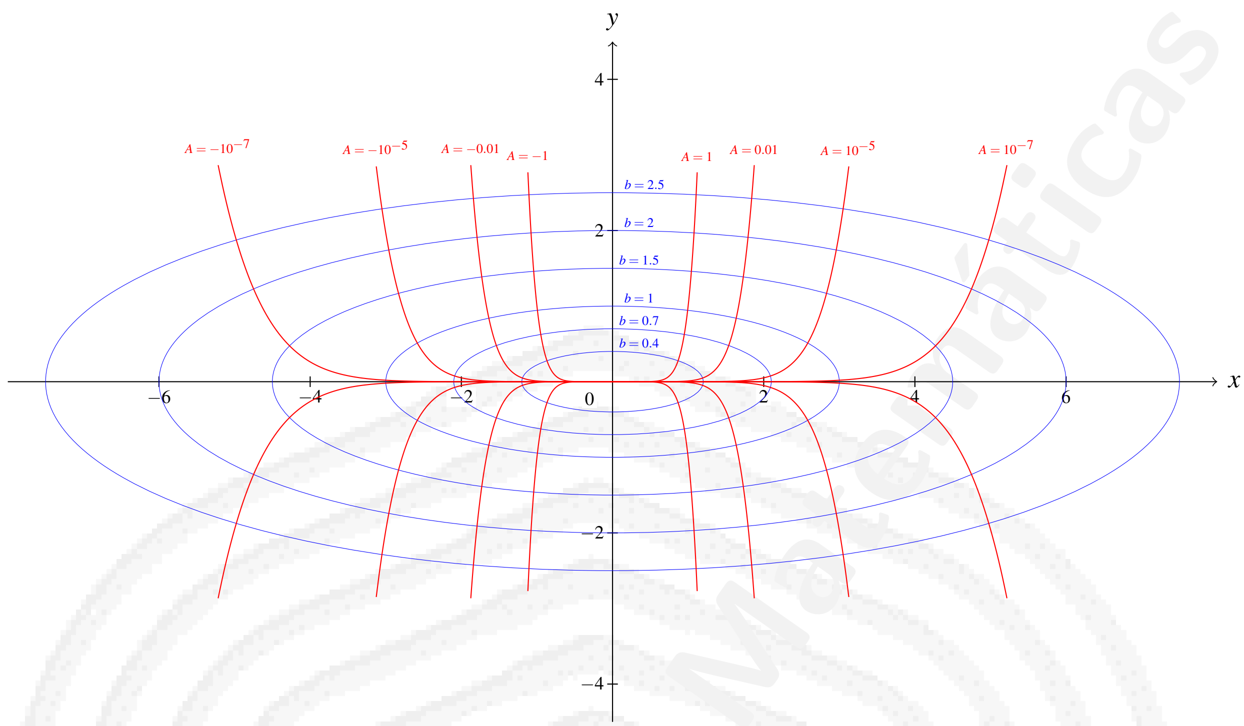
$$\frac{x^2}{9b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

de donde

$$x^2+9y^2=9b^2=C.$$

Derivando implicitamente se tiene que $2x+18yy'=0$, de donde $x+9yy'=0$ y así $y'=-\dfrac{x}{9y}$. Las trayectorias ortogonales provienen de $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9y}{x}$, es decir, $xy'-9y=0$. Pero

$$\begin{aligned} xy'=9y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y}=9\frac{dx}{x} \\ &\Leftrightarrow \quad \ln|y|=9\ln|x|+\ln|C| \\ &\Leftrightarrow \quad \ln|y|=\ln C|x|^9 \Leftrightarrow y(x)=Cx^9. \end{aligned}$$

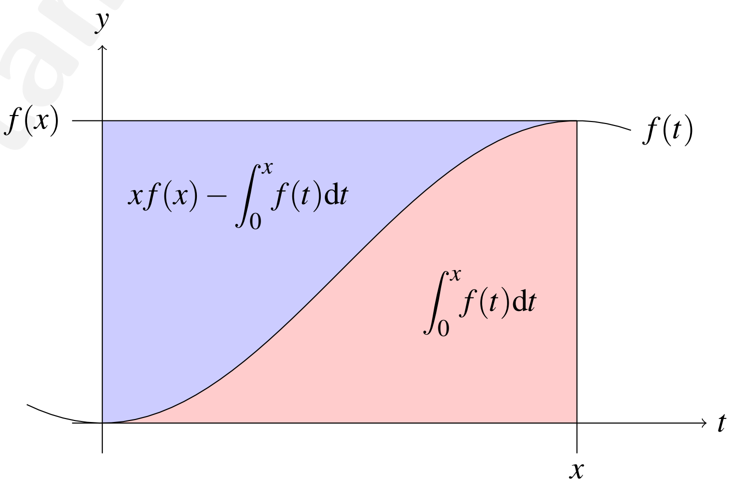


Gráfica de las elipse $\frac{x^2}{9b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
Gráfica de las curvas $y=Ax^9$.

Ejemplo 15 *Una curva de ecuación cartesiana $y=f(x)$ pasa por el origen; por un punto arbitrario de la curva, en el primer cuadrante, se trazan rectas paralelas a los ejes coordenados que forman un rectángulo con ellos. La curva divide al rectángulo en dos regiones A y B, siendo A la región superior y B la inferior. Si el área de A es n veces el área de B, y $f(x)$ es una función creciente en el primer cuadrante, hallar $f(x)$.*

Solución: La condición que el área de A sea igual a n veces el área de B, puede ser expresada en términos de integrales mediante

$$xf(x)-\int_0^x f(t)dt = n\int_0^x f(t)dt.$$

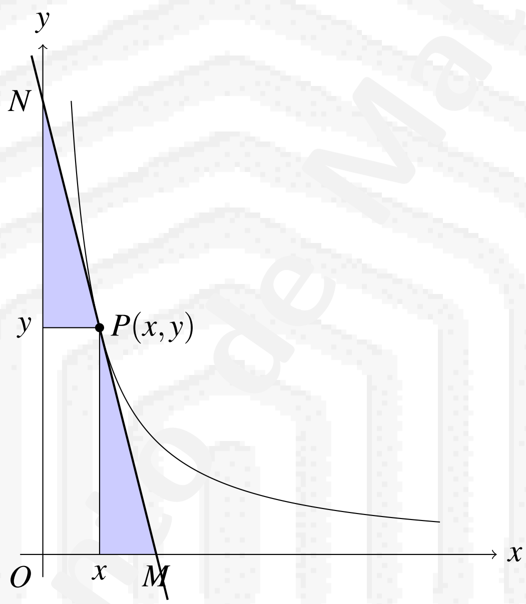


Derivando se tiene que $f(x)+xf'(x)-f(x)=nf(x)$ y así $xf'(x)=nf(x)$. Como $y=f(x)$, obtenemos la ecuación diferencial $xy'=ny$, es decir, $\dfrac{dy}{dx}=n\dfrac{y}{x}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}=n\frac{y}{x} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{y}=n\frac{dx}{x}\\ &\Leftrightarrow \quad \ln|y|=n\ln|x|+\ln|C|\\ &\Leftrightarrow \quad y=C_1x^n.\end{aligned}$$

Como $f(x)$ es creciente, tenemos que $C_1>0$, de donde $f(x)=C_1x^n$.

Ejemplo 16 *Hallar las ecuaciones de las curvas tales que los segmentos de cada tangente comprendidos entre los ejes de coordenadas queden divididos en dos partes iguales por el punto de tangencia.*



Solución: Sea $P(x,y)$ un punto sobre la curva y MN la tangente en ese punto. Por semejanza de triángulos

$$\begin{aligned}OM &= 2x\\ ON &= 2y\end{aligned}$$

$\dfrac{dy}{dx}$ es la pendiente de la tangente en (x,y). Luego,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{ON}{OM}=-\frac{y}{x}.$$

Se usa el signo negativo porque el dibujo muestra la pendiente negativa:

$$\frac{dy}{x}=-\frac{dx}{x}\Rightarrow \ln y+\ln x=\ln C\Rightarrow \ln(xy)=\ln C\Rightarrow xy=C.$$

Correcciones y gráficos: Boris Iskra

May 13, 2008